הנושא: **ריבועים**

הוכן ע״י: אהוד לם.

תקציר: במאמר מוצגות חמש הוכחות לשוויון בין נוסחת הסכום של n הריבועים הראשונים ולמספר תתי הריבועים בתוך ריבוע שצלעו n (כולל הריבוע עצמו). כמו-כן דן המחבר בחשיבותן של הוכחות ויזואליות ובתפקיד של הצגת מספר הוכחות לאותה טענה. בסוף המאמר מופיעים תרגילים העוסקים בנושא. בנוסף, מצורפת תגובתו של גדעון צבס למאמר, שהופיעה בעל״ה 14, עמודים 87-86.

מילות מפתח: שיטות הוראה, הוראה אינדוקטיבית, הוראת מתמטיקה, הבנה, אלגברה, נוסחת סכום ריבועים, אינדוקציה, הוכחות, הוכחה אינדוקטיבית, הוכחה דינמית, הוכחה ויזואלית, הוכחה אינטואיטיבית.

החומר פורסם במסגרת: על״ה 13, אלול תשנ״ג, ספטמבר 1993, עמודים 71-67.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 9 עמודים.

ריבועים...

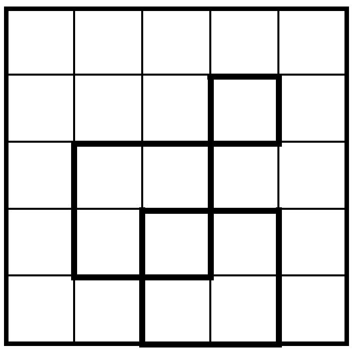
במהלך לימודיהם נתקלים תלמידים רבים בנוסחה הידועה האומרת כי סכום n הריבועים הראשונים הוא: $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

רוב המורים לא מייחסים שום חשיבות לנוסחה זו, ומעטים מציינים בפני תלמידיהם שהיא גם הנוסחה הנותנת את מספר תתי הריבועים בתוך ריבוע שצלעו n. (הכוונה לריבוע שקדקודיו על שריג וכך גם כל תתי הריבועים שלו; בין תתי הריבועים אנו סופרים גם את הריבוע עצמו, ראה איור 1).

במאמר זה אעסוק בהוכחת כל אחת מעובדות אלו, והוכחת הקשר ביניהן. אטען כי העובדה שניתן להוכיח את שלושת השוויונים הללו בדרכים שונות הינה חשובה ומועילה להוראת מתמטיקה.

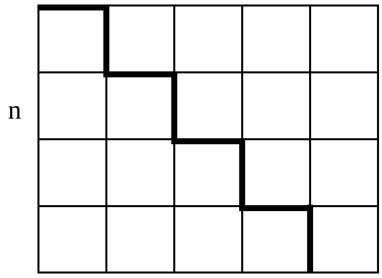
סגנונות למידה וחשיבה

בהמשך, כאשר נדון בדוגמה, נראה שחלק מן ההוכחות הן אנליטיות-פורמליות ושחלקן ויזואליות ("look-see"; ראה Gardner, 1986). ההבחנה בין הוכחה (וחשיבה) אנליטית להוכחה ויזואלית היא בעלת ערך למורה למתמטיקה העומד מול כיתה. אנסה להסביר מדוע כדאי להציג הוכחות שונות וביניהן הוכחות ויזואליות לתלמידים.



איור 1

הסיבה הראשונה להראות הוכחות ויזואליות שונות היא שהן רומזות על צורת החשיבה ה**אינטואיטיבית** במתמטיקה. כשם שאת סכום המספרים הטבעיים הראשונים ניתן לראות כחציו של מלבן (ראה איור 2), ניתן לראות שמתמטיקאים בונים לעיתים הוכחה על ידי שימוש בטיעונים אינטואיטיביים ולרוב ויזואליים. מתמטיקאים מקצועיים יוותרו לרוב על צורת ההצגה הזו כאשר ינסחו את הוכחתם באופן אנליטי - אולם שלב הביניים האינטואיטיבי חשוב ביותר.



איור 2

הצגת החשיבה המתמטית כחשיבה אנליטית לחלוטין, שאין בה מקום לטיעון האינטואיטיבי, היא עוול למתמטיקה. פרט לכך שהיא מציגה את החשיבה המתמטית בצורה מטעה, היא גם מציגה אותה בצורה חלקית. תלמיד שמסיים תיכון ומיימיו לא ראה הוכחה ויזואלית (פרט להוכחות בגיאומטריה), קיבל במהלך לימודיו תמונה חלקית של המקצוע. אין זו תמונה חלקית הנובעת מהתעלמות מתחום שלם (כגון תורת הקבוצות או החבורות) - במקרה זה המצב חמור יותר. התעלמות מתחומים שונים היא לגיטימית והכרחית, משום שכל תחום מהווה מסגרת רחבת היקף, הדורשת השקעה של זמן ומאמץ בלמידתה. אולם במקרה בו אנו עוסקים, בהתעלמות מהוכחות ויזואליות ומעיון אינטואיטיבי, אנו מונעים מתלמיד לפגוש **טכניקה** האופיינית למקצוע, ובכך אנו מציגים לו תמונה מטעה של כל המתמטיקה. זוהי לא הצגה חלקית בלבד, זוהי הצגה מסלפת. זוהי הצגה המתארת את המתמטיקה כמעין עולם סתרים המפיק הוכחות אנליטיות, ונוסחאות קסם.

פרט לסיבה העקרונית להצגת הוכחות ויזואליות, קיימת גם סיבה מעשית דידקטית.

בעומדו מול כיתה יודע המורה שחלק מתלמידיו אינו שולט במיומנויות החשיבה של המקצוע, שחלקם הינם בעלי חשיבה מתמטית טבעית, ושלגבי רבים טרם עוצב סגנון חשיבה אחד ובלעדי. לחלק מן התלמידים יש חשיבה אנליטית מאוד. תלמידים אלו, למשל, נצמדים אל האינדוקציה כמוצאי שלל רב. טכניקה זו תואמת את סגנון מחשבתם - היא מדויקת, תמציתית, ומנוסחת באופן אנליטי-פורמלי. לעומתם, לחלק מן התלמידים חשיבה ויזואלית-גרפית. אלו התלמידים המצטיינים בגיאומטריה וביחוד בסטריאומטריה, אולם לא מגלים כשרון בולט בלימודי האלגברה. רוב התלמידים לא משתייכים לאחת מקבוצות אלו, והם לרוב תלמידים בינוניים במקצוע. אולם אלו ואלו סובלים מצורת ההוראה הנמנעת מהצגת רב גוניותה של המתמטיקה.

הכרות של תלמידים בעלי כשרון מתמטי עם צורות הוכחה שונות יאפשר להם לנצל בצורה טובה את כישוריהם הספציפיים, בין אם הם אנליטיים ובין אם הם ויזואליים-גרפיים.

התלמידים, שנפגעים במידה הרבה ביותר מהתעלמות מצורות הוכחה שונות, הם התלמידים הבינוניים. הם נאבקים, לרוב שלא במודע, לפתח חשיבה שתאפשר להם להצליח במקצוע. אולם הם זוכים רק לדוגמה של סגנון חשיבה אחד, מה עוד שסגנון זה הוא הסגנון האופייני דווקא למתמטיקאים מקצועיים. הם לא מצליחים לעקוב אחרי ההדגמות הוירטואוזיות של המורה (המעוגנות לרוב ברעיונות שאינם מוצגים בפניהם) ולכן אינם מצליחים לפתח סגנון חשיבה המתאים למקצוע. זאת ועוד. במרבית המקרים תלמידים אלו מבינים את הסברי המורה ברמה שטחית שלא מאפשרת להם להגיע לרעיונות ולהוכחות בכוחות עצמם. הצגה רבגונית של המתמטיקה תאפשר לתלמידים הטובים להכיר את המתמטיקה ולהפנימה בכלי החשיבה שלהם. היא תאפשר לתלמידים החלשים יותר לגלות מהו סגנון החשיבה המתמטי המתאים להם.

על מנת להבהיר למה כוונתי, בהצגה רב-גונית אנתח את ההוכחות של הנוסחה ושל השוויונים הנוספים.

ניתוח הדוגמה

לפני שאנתח את הדוגמה מוטב שאבהיר בדיוק למה כוונתי. אני מתבונן בהוכחות שרשרת השוויונים:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} i^2}_{A} = \underbrace{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}_{B} = \underbrace{\text{מס' תתי הריבועים על שריג (לוח שח) שצלעו n}}_{C}$$

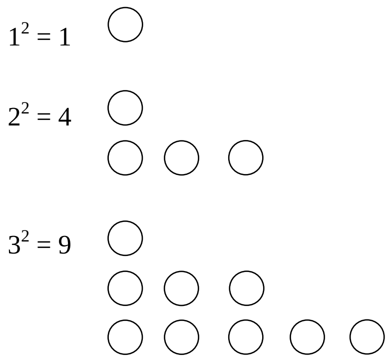
אני רואה שרשרת זו כשלושה שוויונים: $A = B$, $B = C$ ו- $A = C$.

להלן חמש הוכחות לשוויונים שבשרשרת.

1. הוכחת נוסחת סכום הריבועים ($A = B$) על-ידי אינדוקציה.
זאת ההוכחה השגרתית של נוסחת סכום הריבועים, כפי שנלמדת בבית הספר. הוכחה זאת מניחה את ידיעת הנוסחה מראש.

2. הוכחת הנוסחה (A = B) בעזרת טיעון ויזואלי.

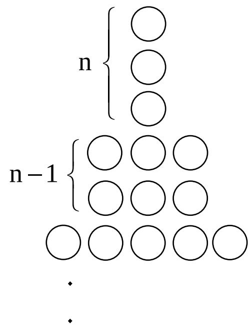
אנו יודעים שניתן להציג כל ריבוע כסכום מספרים אי-זוגיים.
נתאר עובדה זאת בצורה ויזואלית (איור 3):



איור 3

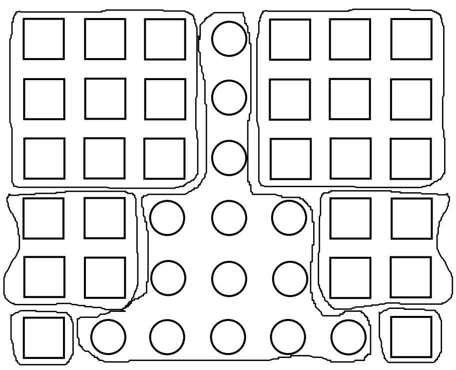
וכן הלאה.

אם נתאר כך את כל הריבועים עד n^2, נראה ששורה בעלת עיגול בודד מופיעה n פעמים (בכל ריבוע), ששורה בת שלושה עיגולים מופיעה n - 1 פעמים וכך הלאה. שרשרת העיגולים הארוכה ביותר היא באורך 2n - 1 והיא מופיעה פעם אחת (בהצגת n^2). נבנה "מגדל" משורות העיגולים (איור 4).



איור 4

ניצור מלבן מהמגדל על-ידי הוספת ריבועים משני צדדיו (איור 5).



איור 5

גובה המלבן $\frac{n(n+1)}{2}$ (כי צלעות הריבועים בצדדים הן באורכים 1, 2, 3, ..., n). רוחב המלבן הוא 2n+1 (שרשרת העיגולים הארוכה ביותר היא 2n -1 ועוד שני ריבועים מצדדיה). לכן שטח המלבן הוא: $\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$.

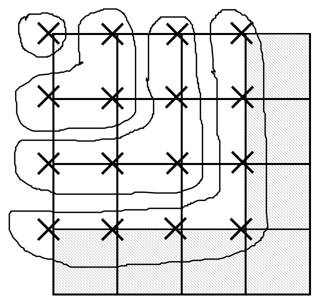
המגדל הוא שליש מהמלבן (כי הוא מייצג סכום ריבועים וכך גם שני הצדדים שהוספנו כדי ליצור מלבן).

לכן שטח המגדל הוא $S = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3. הוכחת הקשר בין ההגדרות (A = C) בעזרת טיעון ויזואלי (דינמי-מוטורי).
בהוכחה זאת מראים שמספר תתי הריבועים בריבוע שצלעו n ניתן על-ידי סכום הריבועים עד n^2 (ראה איור 1).

אנו מתבוננים בריבוע שצלעו n המונח על שריג. צלעות תתי הריבועים, גם הן מונחות על גבי השריג. מספר תתי הריבועים, בכל הגדלים שאפשר להכילם בריבוע ניתן על-ידי סכום הריבועים. הטיעון המבהיר זאת הוא לרוב דינמי: ניתן למקם את תת הריבוע שצלעו n רק בצורה אחת בתוך הריבוע. את תת הריבוע שצלעו n - 1 ניתן למקם בארבע דרכים (צמוד לכל אחת מן הפינות של הריבוע הגדול). את תת הריבוע שצלעו n -2 ניתן למקם בתוך הריבוע ב- 9 דרכים (כי ניתן להזיזו שלושה "צעדים" במאוזן ושלושה במאונך) כך ממשיכים עד לריבוע שצלעו 1, שאותו ניתן למקם בתוך הריבוע ב- n^2 דרכים.

4. הוכחת הקשר בין מספר תתי-ריבועים לבין סכום הריבועים (A = C) באופן אינדוקטיבי.
בהוכחה זאת מראים שמספר תתי הריבועים שווה לסכום הריבועים. הדרך לעשות זאת היא אינדוקטיבית. אנו מראים שבמעבר מריבוע שצלעו k לריבוע שצלעו k + 1 מתוספים $(k+1)^2$ תתי ריבועים (ראה איור 6).



איור 6

כאשר מתוספים הריבועים המקווקוים (כשהגדלנו את הצלע) ניתן להוסיף עוד תתי ריבועים שפינותיהם השמאליות העליונות יהיו בנקודות המסומנות. על כל "זווית" המסומנת באיור 6 מונח מספר אי-זוגי של נקודות מסומנות. סכום המספרים האלה הוא $(k+1)^2$ (באיור $1+3+5+7=16=4^2$).

5. הוכחת הנוסחה B = C באופן אינדוקטיבי.
בהוכחה זאת אנו מוכיחים שהנוסחה $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ מביעה את מספר תתי הריבועים. אנו מוכיחים עובדה זאת ישירות, מבלי לדון בנוסחת סכום הריבועים. נוכיח באינדוקציה. n מייצג את צלע הריבוע הגדול.

כאשר n = 1, מספר תתי הריבועים הוא אחד וכך גם נותנת הנוסחה. המעבר מ- n ל- n + 1, נובע מטיעון זהה לטיעון 4 לעיל.

הוכחות אלו מהוות את אבני הבניין בעזרתן אנו מוכיחים את שלושת השוויונים המבוקשים. ניתן להגיע למטרה במספר דרכים - על ידי שימוש בהוכחות השונות. ננסה לראות כיצד דרכים שונות להוכחת הטענות שונות מבחינה דידקטית.

ניתן לראות את העובדה ששתי ההגדרות מתאימות לנוסחה (הוכחות 1 ו- 2 מצד אחד והוכחה 5 מצד שני). בצורה זו מתקבלות שתי הוכחות שונות (2,5 ; 1,5). יתרונה של ההוכחה הויזואלית של נוסחת סכום הריבועים (הוכחה 2) הוא שהיא מראה את מקור הנוסחה. אין אנו מציגים את הנוסחה לפני התלמיד כדבר ידוע ומוכן.

דרך שניה היא להראות שמספר הריבועים ניתן על ידי סכום הריבועים (4, 3) ולהראות שסכום הריבועים ניתן על-ידי הנוסחה (1,2). כך מתקבלות ארבע הוכחות שונות. היתרון של קבוצת שיטות אלו הוא שהן הולכות בסדר החשיבה הרגיל. לגבי מספר תתי הריבועים אנו מגיעים למסקנה שהוא סכום הריבועים, ואיננו מציגים את הנוסחה באופן מיידי. את הנוסחה אנו מפיקים על ידי כך שאנו עוברים לתחום דיון יותר פורמלי, העוסק בסכום מספרים, ללא אלמנטים ויזואליים. באופן חשיבה זה ניתן להשתמש בהוכחות לא שגרתיות (2,4) כדי להוסיף ענין, לגרות, ולהראות צורות חשיבה שונות. ניתן לתת הוכחה שכולה ויזואלית (2,3), דבר המוסיף נופך של אחידות ומקל על ההבנה.

דרך נוספת ואחרונה להוכחת השיוויונים היא להוכיח את הקשר A = C (3,4), אולם להראות דווקא בדרך 5 שמספר הריבועים ניתן על ידי הנוסחה (B = C). בצורה זו אנו מקבלים עוד שתי הוכחות. יתרונה של גישה זו בכך שהיא לחלוטין "הפוכה". אנו מוכיחים את הטענה הפורמלית, דווקא בתחום הנראה כפחות פורמלי ופחות אנליטי. בצורה זו אנו מראים את העובדה שניתן להוכיח דברים באופן מדוקדק גם לגבי מושגים גרפיים. מובן, שהדבר החשוב ביותר בהחלטה באיזה דרך ללכת היא אופיים וכישוריהם של התלמידים.

רק על ידי שינוי **סדר** ההוכחות הגענו לשמונה הוכחות שונות. עובדה זו כשלעצמה ראויה לציון לפני התלמידים. אין שום סיבה לגרום לתלמידים לחשוב שיש "הוכחה אחת נכונה". הגיון מעורר את הסקרנות ואת הרצון לנסות. רצוי להפוך את הגישה המגוונת למקובלת בתהליך ההוראה והלמידה.

אגב, ניתן להוכיח רק את הקשר A = C (3,4) ולא להראות את הנוסחה. דבר זה טוב הן משום שהוא מסקרן והן משום שהוא מדגיש את הקשר העמוק ולא מסתפק במתן הנוסחה. עבור תלמידים מסוימים הנוסחה נראית כ**סיבה** שסכום הריבועים שווה למספר הריבועים בריבוע גדול, ולא כתוצאה.

כעת אפנה לתיאור מספר גורמים בהוכחות המוסיפים עניין. ישנם גורמים שלא אכנס אליהם מקוצר היריעה.

תחילה נראה את ההבדל בין ההוכחה ה"אינדוקטיבית" של הקשר לבין ההוכחה הדינמית. מעניין ההבדל בין הטיעון הדינמי, שבוחן את ההזזות של תתי הריבועים בתוך הריבוע, לבין הטיעון האינדוקטיבי, שבוחן את נקודות ה"התחלה" החדשות של ריבועים מכל גודל (ראה איור 6). צורת המחשבה היא אמנם דינמית בשתי ההוכחות - בשתיהן יש שימוש במעין תמונה פנימית של השינוי - אולם התמונות שונות ולכן כל אחת מהן מתאימה יותר לאנשים שונים. הגיוון יאפשר לתלמידים נוספים להפנים את ההוכחה.

עוד עובדה לגבי הטיעון האינדוקטיבי (5) שצוינה כבר היא שרואים בו בנקל שהתוספת היא k^2 (במעבר לריבוע שצלעו k). בצורה זו הקשר בין המשמעויות של הנוסחה נעשה ברור מאוד. לא רק ששני המספרים (הסכום ומספר הריבועים) שווים, אלא שהם גם מורכבים מאותם מחוברים, ובמובן מסוים באותו סדר. כאשר מתבוננים בטיעון הדינמי נראה כאילו הקשר הוא "מתוחכם" (כפי שיאמרו תלמידים אחדים). בהוכחה האינדוקטיבית הקשר נראה ברור, כה ברור, עד כי רוב התלמידים יבינו במהלך הוכחה 5 שחייב להיות קשר בין הנוסחאות - הם כאילו יגלו את שלושת השוויונים בעצמם. תחושה כזאת של תגלית תורמת רבות להפנמת החומר הנלמד.

דבר מעניין נוסף הוא השימוש בעובדה שסכום כל המספרים האי-זוגיים עד מספר כלשהו הוא ריבוע. בהוכחה הויזואלית (2) אנו עוברים ממספרים ריבועיים לאי-זוגיים (מהם נבנה המגדל), בעוד שבהוכחה האינדוקטיבית (4) אנו מגיעים לסכום מספרים אי-זוגיים, ומסיקים שהגענו לריבוע.
יש תלמידים אשר מפנימים את המשפט באופן מילולי: "סכום מספרים אי-זוגיים הוא ריבוע" יתכן ויחושו שהמעבר שנעשה בהוכחה הויזואלית אינו מוצדק; זאת משום שהם הפנימו את

המשפט כגרירה ולא כשוויון. באותה צורה יהיו תלמידים שיחושו שהמשפט הוא למעשה "מספר ריבועי הוא סכום מספרים אי-זוגיים". תלמידים אלה מפנימים את הגרירה ההפוכה. היות ששוויון מתמטי הינו גרירה דו-כוונית, העובדה שאנו משתמשים בשני כווני הגרירה עוזרת להבנת מושג השוויון והזהות.

אלמנט שיקסום לתלמידים הטובים ויוריד מעט את רמת הפחד של התלמידים הפחות טובים, הוא שבדרך הויזואלית (2) רואה התלמיד "מהיכן באה הנוסחה". אין "מנחיתים" אותה על התלמיד כמו בתרגילים שיגרתיים באינדוקציה, ואין דורשים מהם לנחש אותה על-ידי בדיקת מספר דוגמאות (כמו בתרגילים מבחינת הבגרות).

רעיון נוסף ואחרון שאציין הוא השימוש בהצגות שונות לדבר אחד בהוכחה הויזואלית של סכום הריבועים (2). המלבן מחולק לשלושה חלקים שווים, שכל אחד מהם שווה לסכום הריבועים. הצלחנו ליצור מלבן משום שאחד החלקים מתואר בצורה שונה מהאחרים (ולא בצורה הרגילה כמספר ריבועים זה ליד זה). השימוש בהצגות שונות של אותו הדבר מועיל גם במקומות אחרים במתמטיקה, והיכולת לחשוב עליו תורמת, לדעתי, לחשיבה מתמטית אמיתית (כך, למשל, בהוכחות רבות בטריגונומטריה, שם מציגים אותו קטע במספר דרכים). ניתן לומר, שאחד המקורות החשובים של חשיבה יצירתית הוא היכולת להתבונן בדברים מוכרים בצורות חדשות. ההצגה של אלמנט אחד בצורות שונות מהווה לכן דוגמה ליצירתיות.

במאמר זה ניסיתי להראות את העושר שקיים אף בדוגמאות פשוטות ביותר. עשיתי זאת על מנת להשיג שתי מטרות. ראשית, רציתי לעודד מורים לגשת להוראת נושאים מסויימים בדרכים בלתי שיגרתיות. שנית, שאפתי להראות כי ניתן ללמוד רבות על ידי עיון בבעיה ממספר נקודות מבט. יש ערך רב לא רק להתאמת הוכחה לרמתה וליכולתה של הכיתה אלא גם לעיון בכל הדרכים יחדיו. עיון כזה מראה את טבעה העמוק של הבעיה ומעורר מחקר עצמאי.

לסיכום, הדגשת הרב-גוניות בהוראת המתמטיקה היא חשובה. היא חיונית למתן תמונה אמינה של המקצוע ומועילה מבחינה דידקטית. גם בתחומים פשוטים ניתן לתת דוגמאות לרב-גוניות זו. צורת הוראה זו מתאימה לא רק לתלמידים טובים אלא גם לתלמידים חלשים, הזקוקים להסברים מפורטים. שימוש בהוכחות צא-וראה מאפשר פניה לסגנונות למידה וחשיבה שלרוב מוזנחים בהוראה.

תרגילים

1. השתמש במערך המספרים הבא כדי להוכיח את נוסחת סכום הריבועים:

$$\begin{array}{l} 1^2 = 1 \\ \quad\ \ \downarrow \\ 2^2 = 1 + 3 \\ \quad\ \ \downarrow\ \ \ \downarrow \\ 3^2 = 1 + 3 + 5 \end{array}$$

(רמז: מגיעים לשיוויון (2) ומפשטים אותו).

2. השתמש במערך המספרים הבא כדי להוכיח את נוסחת סכום הריבועים:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 =$$

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \ldots + n \cdot n =$$

$$\begin{array}{c} \overrightarrow{1 + 2 + 3 + \ldots + n} \\ \overrightarrow{2 + 3 + \ldots + n} \\ \overrightarrow{3 + \ldots + n} \\ \vdots \\ n \end{array}$$

מגיעים לשוויון $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{n(n+1)}{2} - \frac{k(k+1)}{2}\right]$$

3. מספר המלבנים בתוך ריבוע שצלעו n ניתן על ידי הנוסחה $$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$
(הוכח!). חקור את היחס בין מספר הריבועים למספר המלבנים. מה גבולו? מה היחס מלמד?

4. כיצד ניתן להוכיח את הטענה $$\sum_{i=1}^{n} i^k = n\sum_{i=1}^{n} i^{k-1} - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{i} j^{k-1}$$
כיצד היא מביאה להכללת הנוסחה של סכום הריבועים וכיצד ניתן להגיע בעזרתה (באופן אינדוקטיבי) לנוסחאות לסכומי חזקות אחרים?

5. הכלל את נוסחת מספר תתי הריבועים לשלושה מימדים, ולמימד אחד (קטעים על ישר). נסח הכללה למרחב אויקלידי n מימדי והוכח את טענתך.

רשימת ספרות

Gardner M. Look-See Proofs in *Knotted Doughnuts and Other Mathematical Entertainments,* 1986 NY.

Papert S. *Mindstorms*: *Children, Computers and Powerful Ideas,* 1980 NY.

Polya G. *Induction and analogy in Mathematics*, 1945 NJ.

תגובתו של גדעון צבס, אוניברסיטת תל-אביב (על"ה 14, עמודים 86-87)

סכימה טלסקופית

תוכן שורות אלו מתקשר למאמר "ריבועים..." מאת אהוד לס בחוברת על"ה 13 ולתרגילים שבסופו. בקטע הבא נסביר תחילה את המלים שבכותרת, כלומר "סכִמה טלסקופית".

סיכום טורים אינסופיים מסוימים

נניח שברצוננו למצוא את הסכום $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$. נשים לב שאת השבר $\frac{1}{k(k+1)}$ אפשר לפצל לצורה $\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$, פיצול שהוא למעשה הפעולה ההפוכה ליצירת מכנה משותף. לפיכך,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right]=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-...+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

רואים, כי פרט ל-1 שבהתחלה ול- $\left(\frac{-1}{n+1}\right)$ שבסוף, כל שאר המחוברים מתקזזים זוגות זוגות וכל הסכום הארוך "מתקפל" באופן טלסקופי לערך $1-\frac{1}{n+1}$. אגב, סכימה טלסקופית זו מראה שאת הטור האינסופי המתאים אפשר לסכם במדויק וקיים $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=1$

אם רצוננו, למשל, לדון בסכום האינסופי הידוע $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ נוכל לשים לב שהוספת מחוברים נוספים יוצרת סדרה עולה וכן

$$1<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}<1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}=1+\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right]=1+1+\frac{1}{n}$$

כאשר הפעלנו את הסכימה הטלסקופית וכן את האי-שוויון $\frac{1}{k}<\frac{1}{k-1}$.

מכאן מקבלים: $1<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}<2$, ויודעי טור פורייה יזכרו אולי כי הטור הנדון מסתכם ל- $\frac{\pi}{6}$.

באופן דומה אם נעיין ב- $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}$, נקבל:

$$1<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}=1+\frac{1}{8}+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k^3}<\frac{9}{8}+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k(k-1)(k-2)}=$$
$$=\frac{9}{8}+\sum_{k=3}^{\infty}\left[\frac{1/2}{(k-1)(k-2)}-\frac{1/2}{k(k-1)}\right]=\frac{9}{8}+\frac{1/2}{2}=\frac{11}{8}$$

וכך אפשר להמשיך כאשר הסכימה הטלסקופית מאפשרת את קבלת החסמים.

סכום ריבועים

ברצוננו להשתמש בסכימה טלסקופית כדי להצביע על דרך ידועה, פשוטה במיוחד, לקבלת נוסחת הסיכום של $\sum_{k=1}^{n} k^2$ ונוסחאות דומות. תלמידים המתבקשים להוכיח את נוסחת הסיכום באמצעות אינדוקציה מתמטית, בצדק שואלים מהיכן הוצנחה עליהם הנוסחה הזאת.

כשרעיון הסכימה הטלסקופית בראשנו, נשים לב לשוויון $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$

בשלב זה נרשום שוויון זה בשביל $k = 1$, מתחתיו את השוויון בשביל $k = 2$, וכו׳ עד $k = n$ ונחבר את כל השורות הללו (בקיצור נאמר שהפעלנו $\sum_{k=1}^{n}$ על שני האגפים). באגף שמאל מופיעה, כמתוכנן, סכימה טלסקופית ולכן מקבלים $(n+1)^2 - 1^2 = 2\sum_{k=1}^{n} k + n$, כאשר n באגף ימין נוצר מהחיבור של n אחדות. משוויון זה מקבלים את אשר התלמידים יודעים גם מעיסוקם בטור חשבוני $\sum_{k=1}^{n} \frac{n(n+1)}{2}$.

מכאן מובילה דרכנו ישירות לשוויון $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$. כמקודם נפעיל $\sum_{k=1}^{n}$ על שני האגפים ולאור הסכימה הטלסקופית באגף שמאל נקבל $(n+1)^3 - 1^3 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + n$.

נציב את התוצאה שקיבלנו בשביל $\sum_{k=1}^{n} k$, נבודד את $\sum_{k=1}^{n} k^2$ ונקבל

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}\left[n^3 + 3n^2 + 3n - \frac{1}{2}n(n+1) - n\right] = \frac{n}{6}\left(2n^2 + 3n + 1\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

תוצאה זו התקבלה, אפוא, כ״הצמחה ולא הצנחה״ (ביטוי מוצלח של נצה מובשוביץ מהטכניון) ולא עוד, אלא שהדרך סלולה להרחבתה.

הרחבות

נתחיל מהשוויון $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$. נפעיל $\sum_{k=1}^{n}$ על שני האגפים, נציב את התוצאות הקודמות במקומות המתאימים ונקבל, לאחר עוד שתי שורות ופירוק לגורמים, את הנוסחה $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

כך נוכל להמשיך, כאשר הסכימה הטלסקופית והצבת התוצאות הקודמות מופעלים שוב ושוב. הנוסחאות המתקבלות חשובות במיוחד לאלה המעדיפים את הצגת החשבון האינטגרלי לפני הדיפרנציאלי (כמקובל בספרים מסוימים) ובהתאם לכך מטפלים באינטגרל של x^k ישירות כגבול של סכום.

אין בכל האמור לעיל כדי להחליף את הדרך הויזואלית-אינטואיטיבית שהובאה בעל״ה 13, אשר כפי שציין שם אהוד לס, חשיבותה רבה בחינוך המתמטי ובהצגת מקצוע המתמטיקה בפני התלמידים.

נציין לבסוף כי בסכימה טלסקופית משתמשים גם להערכת שגיאות קירוב באינטגרציה נומרית. זו הדרך לקבלת נוסחאות משופרות שבאופן לא מפתיע, בדיוק בגלל הסכימה הטלסקופית, נותנות משקל יותר להתנהגות האינטגרנד בקצות קטע האינטגרציה.

״ריבועים ״, אהוד לס
על״ה 13, אלול תשנ״ג, ספטמבר 1993
האוניברסיטה העברית ירושלים