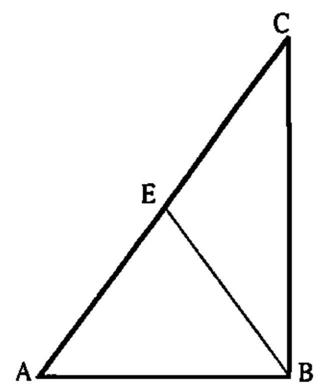
התיכון שווה למחצית היתר (עם נייר ומספריים)
דרכי הוכחה והמחשה

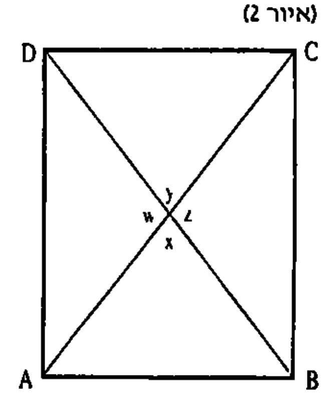
אהוד לם
ירושלים

מן הדין לפתוח את הדיון הבא באזהרה "סכנה אינטואיציה" המתמטיקה כמקצוע, מנסה לרסן ולאלף אינטואיציות על-ידי אקסיומות ומשפטים. התיאורים שיבואו בהמשך הם של השלב האינטואיטיבי בעיון במשפט הגיאומטרי הקובע שבמשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחציתו. הכלים האינטואיטיביים שנשתמש בהם בהחלט יכולים להביא לתוצאות שגויות - היות שלא נוכיח את תקפותם על בסיס האקסיומות של הגיאומטריה האוקלידית. יתר על כן - נדגיש ונראה שהם אינם תקפים באופן כללי



איור 1

המשפט שנוכיח עוסק במשולש ישר זווית כפי שנראה באיור 1, תיכון הנמתח מקדקוד הזווית הישרה B, אל היתר שווה באורכו למחצית היתר BE=AE=CE כמובן שמשפט זה דורש הוכחה, וההוכחה הסטנדרטית מבוססת על בניית העתק של המשולש ABC CDA (איור 2)



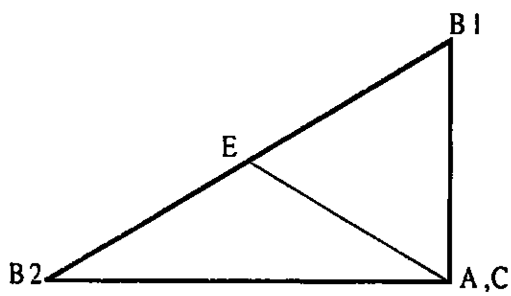
הבנייה נותנת שני זוגות של משולשים חופפים

$AED \cong CEB$, $AEB \cong CED$

מכאן נובע שוויון הזוויות $w=z$, $x=y$, ולכן $x + w = 180^0$ ולכן BE ו-DE נמצאים על אותו ישר כעת $\Delta ABC \cong \Delta ABD$ (צז"צ) לכן $BD = BE + ED = 2\ BE = AC$ לכן כמובן $BE=AC/2$ מש"ל

זו כמובן הוכחה אפשרית, אולם היא צורמת - ואכן אפשר לשפר אותה בקלות אנו נשפץ אותה, אולם נעשה זאת באמצעות הוכחה אחרת לחלוטין - הוכחה שהיא חשודה מאוד מבחינה אקסיומטית. אנו נגזור את המשולש ונבנה מחלקיו צורה חדשה'

ניקח את המשולש ABC ונחתוך אותו לאורך הישר BE נקבל שני משולשים ABE ו-BEC כעת נצמיד את הנקודה A לנקודה C, ונקבל משולש חדש (ראה איור 3)



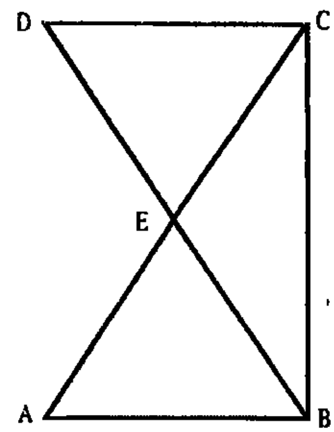
איור 3

זהו, אכן, משולש משום ש-CE=AE, ומשום שסכום הזויות AEB ו-CEB הוא 180^0 מסיבות אלו החלקים מתחברים ביניהם לאורך הקו AE, CE והצלע B_1EB_2 היא אכן על קו ישר אחד

המשולש הזה חופף למשולש המקוריי הדבר נובע מכך ש-$AB_1=AB$, $CB_2=CB$ ומשום שהזווית $B_1(A\,C)B_2$ שווה לזווית $\angle ABC$ (שתיהן ישרות) היות שהמשולשים חופפים $AC=B_1B_2$ אולם $B_1B_2=B_1E+B_2E=2\ BE$ לכן $AC=2\ BE$, כלומר $BE=AC/2$ מש"ל

כיצד אפשר למצוא הוכחות כאלו, המתבססות על גזירות? אני יכול רק להעיד, שאני ממש חתכתי משולש נייר לשני חלקים. דרך נוספת להגיע להוכחה הזאת היא להשתמש בגרסה משופצת של ההוכחה הראשונה. ברגע שמבינים את ההוכחה המשופצת, רואים מיד שהיא למעשה ההוכחה "הגזורה" בתחפושת.

ההוכחה מבוססת על המשכת הקטע BE. אנו ממשיכים אותו, ויוצרים את הקטע BD, השווה באורכו ל-2 BE (כלומר ED=EB). שני המשולשים המושחרים חופפים כמובן[1]. מכאן נובע שהמשולשים ABC ו-DCB חופפים (צ״צ). לכן כמובן BD=2 BE=AC, כלומר BE=AC/2 מש״ל.



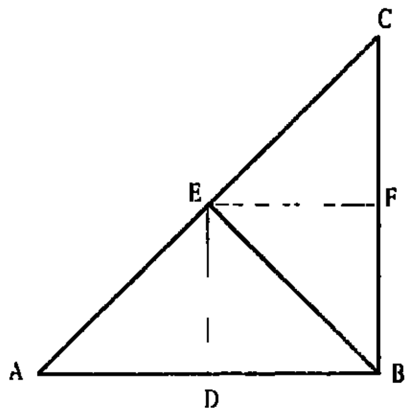
איור 4

מעיון בהוכחה זו עולה, שלמעשה אין לנו צורך במשולש ABE. אנו עושים בו שימוש אך ורק כדי להראות ש-AB=DC. לכן אפשר למעשה למחוק אותו. היות שאנחנו כן צריכים את המשולש DEC, ומשום שאנחנו יודעים שהמשולשים ABE ו-DEC חופפים, אנחנו יכולים להזיז את AEB למקומו של DEC. משום שאנחנו פשוט מזיזים חלקים, אין צורך ממשי לבנות את הקטע DB. ה"הזזה" הזאת ניתנת למימוש רק אם נגזור לאורך הקטע BE. זה מקור הוכחת הגזירה.

על-ידי שימוש בהסבר זה, יכול הקורא למצוא בנקל הוכחות נוספות, שאפשר להפכן להוכחות גזירה.

הקורא שהמשיך עמנו בסבלנות לאורך שלוש הוכחות של אותו משפט, סבור מן הסתם שראה את כל ההוכחות הדרושות לו. אולם לפני שאסיים בנספח הערות כלליות, אראה עוד הוכחה. הוכחה זו תשמש אותנו כצעד מקדים לסוג נוסף של הוכחה: הוכחת קיפול.

את המשפט המקורי אפשר להוכיח על-ידי הוספת שני קטעים לאיור הקודם של המשולש ABC. הקטעים הללו ED ו-EF, מחברים את אמצעי צלעות המשולש. קטעים מן הסוג הזה, תמיד, מקבילים לצלע השלישית, ואורכם שווה למחציתה, לכן ED||BC ו-EF||AB. מכאן נובע כמובן שהמשולשים FDB ו-EFB ישרי זווית ($\angle EFB = \angle EDB = 90°$). משום ש-ED=BC/2 ו-DB=AB/2, אפשר להראות בקלות, על-ידי שימוש במשפט פיתגורס, ש-EB=AC/2 מש״ל.



איור 5

מן ההוכחה הזאת אפשר להגיע בקלות להוכחת קיפול. כל שצריך לעשות הוא לקפל את המשולש ABC לאורך הישר ED, ומשום שהחלקים בקיפול מתאימים, אנחנו יכולים להסיק ש-BE=AC/2. מובן שאפשר גם לקפל לאורך הישר EF ולקבל אותה תוצאה. אפשר לקבל תוצאה אלגנטית, על-ידי קיפול לאורך שני הישרים - וקבלת מלבן.

ניסיתי להראות כאן מספר דרכי הוכחה, ולהדגיש את ההוכחות הלא קונבנציונליות. לי עצמי קל היה יותר למצוא את הוכחת הגזירה ואת הוכחת הקיפול, מאשר למצוא את ההוכחות הרגילות.

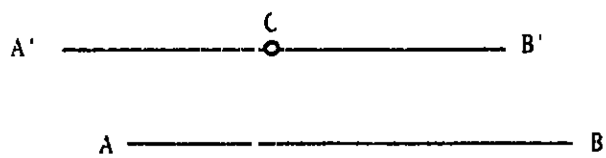
שימוש במודלים מנייר יכול להקל במציאת הוכחות. אולם לרוב הוכחות אלו יהיו מבוססות על קיפולים, גזירות והדבקות. יש סיפוק גדול בתרגום הוכחות אלו להוכחות רגילות המבוססות על חפיפת משולשים ומשפטי הגיאומטריה המקובלים. תרגום זה נעשה בקלות, כפי שהדגמתי.

השאלה אם גזירות וקיפולים שומרים על התכונות הבסיסיות של ישרים, זוויות וצורות, היא מעניינת וקשה. אין לי תשובה מלאה, ואשמח לשמוע רעיונות. בכל אופן, ברור לי שהמעבר לעולם הפיזי גורר עמו בהכרח ויתור על עקרונות חשובים של הגיאומטריה האוקלידית. באופן טבעי כל התכונות המבוססות על אינסופיות הן חשודות.

הפיזיקאי ריצ'ארד פיינמן מספר באחד מספריו[1] כיצד היה מנחש משפטים בטופולוגיה על בסיס האינטואיציה הפיזיקלית שלו כמובן, שבכל המקרים שההוכחות נבעו מחיתוך גוף לאינסוף חלקים, האינטואיציה של הפיזיקאי נעצרה באטומים פיינמן מספר כי כאשר נשאל אם אפשר לחתוך תפוז לחתיכות ולהרכיב מהן גוף הגדול מתפוז, הוא השיב מיד בשלילה כאשר הראו לו שקיים משפט המבטיח שאפשר לעשות זאת, היה יכול פיינמן להעמיד את המתמטיקאי על טעותו, שהרי אי-אפשר לפרק תפוז לחתיכות הקטנות מן החלקים התת-אטומיים

אביא רק שתי דוגמאות מתחום הדיון שלנו, כדי להמחיש שהסכנה הזו קיימת גם כאן

הדוגמה הפשוטה ביותר מתבססת על גזירת נייר כבאיור הבא



איור 6

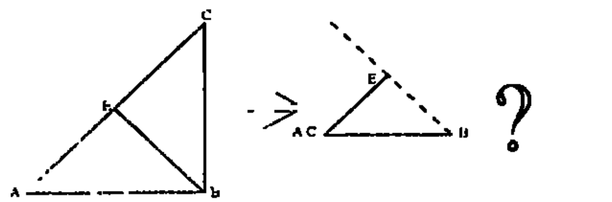
לפי האקסיומה החמישית של אוקלידס, קיים ישר **יחיד** A B העובר דרך הנקודה C והמקביל ל-AB כל שצריך לעשות כעת הוא לגזור דרך הנקודה C, ולקבל שתי נקודות C_1, C_2 דרכן יכולים לעבור שני מקבילים

מחשבה קצרה מראה שתכונות כמו מקבילות, לא נשמרות תחת גזירה, וקיפול

דוגמה נוספת, היא ה'הוכחה' הבאה של המשפט שלנו

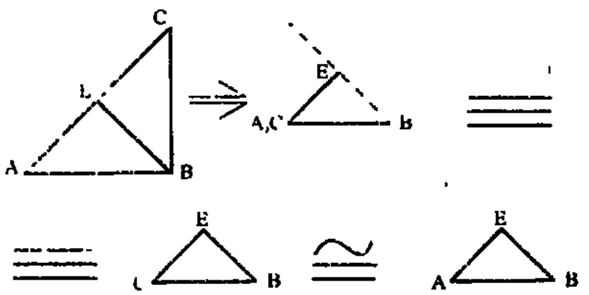
[1] ראה Surely You're Joking MR Feynman, בפרק 'A Different Box of Tools' הספר יצא לאור גם בעברית

תלמיד גזר לעצמו משולש נייר והחל משחק בו בניסיונותיו העלה את התגלית הבאה, כשקיפל לאורך BE



איור 7

זה כיוון הוכחה' חושב התלמיד אבל כדי להראות פורמלית צריך להראות כי



וכמעט אפשר להוכיח את זה כי AE=CE, ו EB=EB (כמובן' זה היופי בקיפול) אבל
לא חייב להיות ש-CB=AB ושהזווית AEB=CEB

מעט מחשבה תראה שהקיפול הזה מצליח רק כשהמשולש שווה שוקיים

זה ממחיש את הסכנה בבניית אינטואיציות ממקרה פרטי אולם חשוב לזכור, שאפשר לבנות אינטואיציות **רק** ממקרים פרטיים העיון המופשט מנסה, כפי שאמרנו בפתיחה, לאלף ולרסן את האינטואיציות, אולם הללו נבנות מעיון במקרים פרטיים אינטואיציות טובות מבוססות על ניסיון למצוא את הגבולות של המקרים הפרטיים הללו